Cálculo com Formas Diferenciais

André L.G. Mandolesi

Verão UFBA 2020 - Semana Temática de Geometria e Física Matemática

Limitações do Cálculo Vetorial

Desenvolvido tendo em vista campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Em $\mathbb{R}^n$ ou espaços curvos outros formalismos funcionam melhor.

Alguns inconvenientes do Cálculo Vetorial:

Rotacional não generaliza bem para dimensões maiores.

$$\nabla \times v = \det \begin{pmatrix} i & j & k & l \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial w} \\ v_x & v_y & v_z & v_w \end{pmatrix} = ???$$

Produto vetorial também só funciona em $\mathbb{R}^3$.

Fórmulas dependem do sistema de coordenadas.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} f(r,\theta,\varphi) r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi.$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} = {} & \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\varphi \sin\theta\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\hat{\mathbf{r}} \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\varphi\right)\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}},\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Identidades complicadas, e várias seguem algum padrão (qual?).

$$\nabla(\psi\phi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$
$$\nabla\cdot(\psi\mathbf{A}) = \psi\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla\psi$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} - (\nabla\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}$$
$$\nabla\times(\psi\mathbf{A}) = \psi(\nabla\times\mathbf{A}) + \nabla\psi\times\mathbf{A}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$$
$$\nabla\times(\nabla\psi) = \mathbf{0}$$
$$\nabla\cdot(\nabla\psi) = \nabla^2\psi$$

Vários teoremas (Green, Stokes, Gauss, etc.) com mesma função: transformar integral numa região em outra integral na fronteira.

$$\int_C \nabla f \cdot ds = f(B) - f(A)$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P\, dx + Q\, dy$$

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot \hat{n}\, dS = \int_C F \cdot dr$$

$$\iiint_R \nabla \cdot F\, dV = \iint_S F \cdot \hat{n}\, dS$$

Álgebra Linear: Espaço Dual

$V =$ espaço vetorial real de dimensão n

Funcional linear é uma transformação linear $\varphi : V \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(au + bv) = a\varphi(u) + b\varphi(v).$$

Espaço dual $V^* = \{\text{funcionais lineares em } V\}$

Cada base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V dá uma *base dual* $(\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ de V^*, onde cada funcional mede uma componente do vetor:

$$v = v^1 e_1 + \ldots + v^n e_n = \sum_i v^i e_i \;\Rightarrow\; \varphi^i(v) = v^i.$$

Dado $\mu \in V^*$, pondo $\mu_i = \mu(e_i)$ temos

$$\mu(v) = \mu(\sum_i v^i e_i) = \sum_i v^i \mu_i = \sum_i \mu_i \varphi^i(v) \;\Rightarrow\; \mu = \sum_i \mu_i \varphi^i.$$

$\dim V^* = \dim V \;\Rightarrow\;$ isomorfos (não vale em dim ∞).

Isomorfismo não é canônico, depende da base escolhida.

Ex: $dx, dy, dz : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funcionais dados em $v = v_x i + v_y j + v_z k$ por

$$dx(v) = v_x, \quad dy(v) = v_y, \quad dz(v) = v_z.$$

(dx, dy, dz) é a base de $(\mathbb{R}^3)^*$ dual da base (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$.

Dado um funcional $\mu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, pondo $\mu_i = \mu(i), \ldots, \mu_k = \mu(k)$ temos

$$\begin{aligned}
\mu(v) &= \mu(v_x i + v_y j + v_z k) \\
&= v_x \cdot \mu(i) + v_y \cdot \mu(j) + v_z \cdot \mu(k) \\
&= dx(v) \cdot \mu_i + dy(v) \cdot \mu_j + dz(v) \cdot \mu_k \\
&= [\mu_i \cdot dx + \mu_j \cdot dy + \mu_k \cdot dz](v)
\end{aligned}$$

Logo todo μ é combinação linear $\mu = \mu_i \cdot dx + \mu_j \cdot dy + \mu_k \cdot dz$ de dx, dy, dz com componentes μ_i, μ_j, μ_k.

Elementos de V são chamados de *vetores contravariantes*, e os de V^* são *vetores covariantes* ou *covetores*.

A diferença costuma ser descrita em termos de como suas componentes se transformam numa mudança de base.

Se $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ se transforma por uma matriz mudança de base T,

$$v \mapsto Tv,$$

então $\varphi = (\varphi_i \ \varphi_j \ \varphi_k)$ se transforma compondo com a inversa,

$$\varphi \mapsto \varphi \circ T^{-1},$$

de modo que o escalar $\varphi(v)$ não se altere,

$$\varphi(v) \mapsto \varphi(T^{-1}Tv) = \varphi(v).$$

Se V tiver produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ há isomorfismo canônico com V^*, associando cada $v \in V$ a um funcional $\nu \in V^*$ definido por

$$\nu(u) = \langle v, u \rangle.$$

Esse isomorfismo e sua inversa são os *isomorfismos musicais*, representados como

$$\nu = v^\flat, \qquad v = \nu^\sharp.$$

Ex: $i^\flat = dx$ pois $i^\flat(v) = \langle i, v \rangle = v_x = dx(v)$.

Induzem produto interno em V^*, $\langle \mu, \nu \rangle_{V^*} = \langle \mu^\sharp, \nu^\sharp \rangle_V$.

$(e_1, \ldots, e_n)$ base orthonorm. $\Rightarrow (e_1^\flat, \ldots, e_n^\flat)$ base orthonorm., dual

Ex: (i, j, k) base ortonormal de $\mathbb{R}^3$,
(dx, dy, dz) base orthonormal de $(\mathbb{R}^3)^*$.

Seja $(e_1, \dots, e_n)$ uma base de V, e $(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ sua dual em V^*.

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é bilinear, basta saber valores nos elementos da base.

Definindo matrizes (*métrica*),

$$(g_{ij}) = \big(\langle e_i, e_j \rangle \big), \qquad (g^{ij}) = \big(\langle \varphi^i, \varphi^j \rangle \big).$$

temos

$$\langle u, v \rangle = \Big\langle \sum_i u^i e_i \,, \sum_j v^j e_j \Big\rangle = \sum_{i,j} g_{ij} u^i v^j$$

e

$$\langle \mu, \nu \rangle = \Big\langle \sum_i \mu_i \varphi^i \,, \sum_j \nu_j \varphi^j \Big\rangle = \sum_{i,j} g^{ij} \mu_i \nu_j$$

Mostra-se que $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, ou às vezes se usa como definição.

$\sharp$ e $\flat$ fazem o subir/descer de índices do cálculo tensorial.

Componentes do vetor $v = \sum_i v^i e_i$ e do covetor $v^\flat = \nu = \sum_i \nu_i \varphi^i$ se relacionam por

$$\nu_i = \sum_j g_{ij} v^j, \qquad v^i = \sum_j g^{ij} \nu_j.$$

É comum usar a mesma letra para v e ν, e tratar v^i e ν_i como componentes contra- e covariantes de um mesmo "tensor".

Álgebra de Grassmann de Formas

Potência exterior de grau p: $\Lambda^p V^* = \{p\text{−formas em } V\}$.

0-formas = escalares, $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$.

1-formas = funcionais, $\Lambda^1 V^* = V^*$.

2-formas = funções bilineares alternadas $\alpha : V \times V \to \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \alpha(au + bv, w) = a\,\alpha(u, w) + b\,\alpha(v, w), \\ \alpha(u, v) = -\alpha(v, u). \end{cases}$$

p-forma = função multilinear alternada $\alpha : V^p \to \mathbb{R}$, isto é,
uma função real $\alpha(v_1, \ldots, v_p)$, linear em cada entrada,
que muda de sinal cada vez que trocamos 2 vetores.

Se houver 2 vetores iguais em uma forma, ela dá 0,

$$\alpha(u, v, u) = -\alpha(u, v, u) \quad \Rightarrow \quad \alpha(u, v, u) = 0.$$

O mesmo ocorre se os vetores forem L.D.,

$$\alpha(u, v, au + bv) = a\,\alpha(u, v, u) + b\,\alpha(u, v, v) = 0.$$

$\Lambda^p V^* = \{0\}$ se $p > \dim V$, pois p vetores serão L.D.

Pensando nas colunas de uma matriz como vetores, essas propriedades lembram determinantes.

Dadas 1-formas (funcionais) φ e ψ, definimos uma 2-forma que é seu *produto exterior (wedge)* $\varphi \wedge \psi$ por

$$\varphi \wedge \psi(u, v) = \varphi(u)\psi(v) - \varphi(v)\psi(u).$$

Esse produto é alternado $\begin{cases} \varphi \wedge \psi = -\psi \wedge \varphi \\ \varphi \wedge \varphi = 0 \end{cases}$

Ex:

$$\begin{aligned} dx \wedge dz(u, v) &= dx(u) \cdot dz(v) - dx(v) \cdot dz(u) \\ &= u_x v_z - u_z v_x \\ &= \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \\ &= \pm \text{ área da projeção no plano } xz \text{ do} \\ &\qquad \text{paralelogramo gerado por } u, v \end{aligned}$$

Dadas uma p-forma α e uma q-forma β, a $(p+q)$-forma $\alpha \wedge \beta$ é calculada em $p+q$ vetores assim:

- calcule α em p deles, β nos q outros, e multiplique;
- repita para todas as possíveis escolhas;
- some com sinais dados pela paridade da permutação.

$$\begin{aligned} dx \wedge dy \wedge dz(u,v,w) &= + dx(u) \cdot dy \wedge dz(v,w) \\ &\quad - dx(v) \cdot dy \wedge dz(u,w) \\ &\quad + dx(w) \cdot dy \wedge dz(u,v) \\ &= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \\ &= \pm \text{ volume do paralelepípedo gerado por } u, v, w \end{aligned}$$

Alternatividade depende do grau $\begin{cases} \alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \\ \alpha \wedge \alpha = 0 \quad \text{se } p \text{ ímpar} \end{cases}$

$\alpha \wedge \beta$ pode ser calculada usando distributividade e alternatividade.

Ex: se $\alpha = \alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz$ e $\beta = \beta_x dx + \beta_y dy + \beta_z dz$,

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= \alpha_x \beta_y dx \wedge dy + \alpha_y \beta_x dy \wedge dx + \dots \\
&= (\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x) dx \wedge dy + \dots \\
&= \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Nesse caso o cálculo parece com o do produto vetorial.

Fica idêntico se fizermos corresponder
$$\begin{cases} dy \wedge dz & \leftrightarrow \quad i \\ dz \wedge dx & \leftrightarrow \quad j \\ dx \wedge dy & \leftrightarrow \quad k \end{cases} \qquad (??)$$

Generaliza para qualquer dimensão (embora não nesse formato).

Base β de V^* dá uma *base associada* em $\Lambda^p V^*$, formada pelos produtos exteriores de todas escolhas de p dos n elementos de β.

espaço	base	dim
$\Lambda^0(\mathbb{R}^3)^*$	1	1
$\Lambda^1(\mathbb{R}^3)^*$	$dx,\ dy,\ dz$	3
$\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$	$dx \wedge dy,\ dx \wedge dz,\ dy \wedge dz$	3
$\Lambda^3(\mathbb{R}^3)^*$	$dx \wedge dy \wedge dz$	1

$$\dim \Lambda^p V^* = \binom{n}{p} = \dim \Lambda^{n-p} V^* \ \Rightarrow \ \text{isomorfos (não canônico)}$$

$\dim \Lambda^n V^* = 1 \ \Rightarrow$ formas de $\Lambda^n V^*$ diferem por fator multiplicativo.

Forma volume é uma $\omega \in \Lambda^n V^*$ não-nula.
Equivale a uma medida de volume e uma orientação em V.

Produto interno em V^* induz outro em $\Lambda^p V^*$: dadas 1-formas $\mu_1, \ldots, \mu_p, \nu_1, \ldots, \nu_p$, definimos

$$\langle \mu_1 \wedge \ldots \wedge \mu_p \, , \nu_1 \wedge \ldots \wedge \nu_p \rangle = \begin{vmatrix} \langle \mu_1, \nu_1 \rangle & \cdots & \langle \mu_1, \nu_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mu_p, \nu_1 \rangle & \cdots & \langle \mu_p, \nu_p \rangle \end{vmatrix}$$

e depois estendemos linearmente.

Base ortonormal de V^*, base associada em $\Lambda^p V^*$ é ortonormal.

Produto interno em V induz outros em V^* e $\Lambda^p V^*$, e com uma orientação dá também uma forma volume $\omega \in \Lambda^n V^*$.

Isomorfismo canônico (*estrela de Hodge*) $* : \Lambda^p V^* \to \Lambda^{n-p} V^*$ definido por

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \, \omega \qquad \forall \; \alpha, \beta \in \Lambda^p V^*.$$

Inverso é ele mesmo, a menos de sinal: $*^{-1} = * \cdot (-1)^{p(n-p)}$

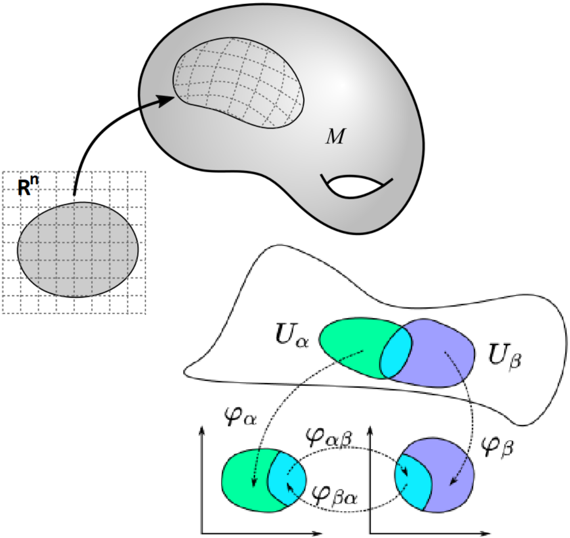
Ex: em $\mathbb{R}^3$, com $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$, temos

$$\begin{aligned} 1 \; &\overset{*}{\longleftrightarrow} \; dx \wedge dy \wedge dz \\ dx \; &\overset{*}{\longleftrightarrow} \; dy \wedge dz \\ dy \; &\overset{*}{\longleftrightarrow} \; dz \wedge dx \\ dz \; &\overset{*}{\longleftrightarrow} \; dx \wedge dy \end{aligned}$$

Com isomorfismo musical dá a correspondência do último exemplo.

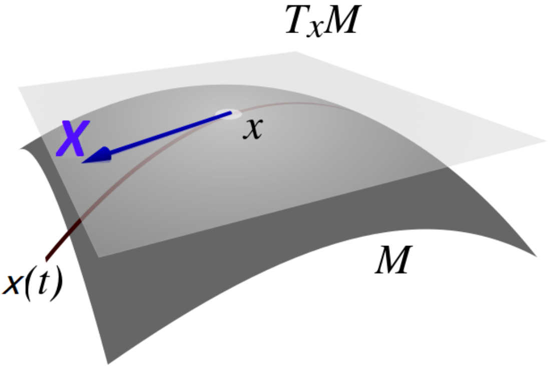
Variedades diferenciáveis

Variedade M de dim n é, grosso modo, um espaço coberto por sistemas de coordenadas locais $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$.



Vetor X tangente em $x \in M$ é a derivada $X = x'$ de uma curva $x(t)$ em M passando por x.

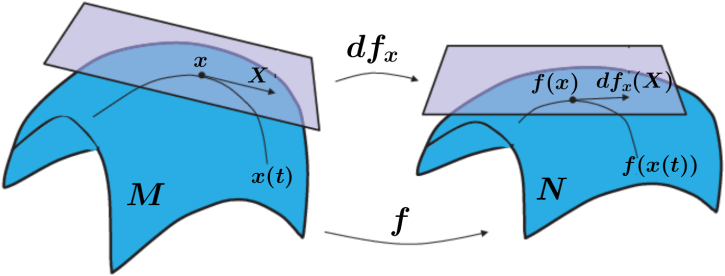
Espaço tangente $T_x M = \{\text{vetores tangentes a } M \text{ em } x\}$.



Métrica g_{ij} em M é um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em cada $T_x M$ (variando suavemente).

Função $f : M \to N$ entre variedades dá em $x \in M$ uma transform. linear $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ (*diferencial* ou *pushforward* f_*),

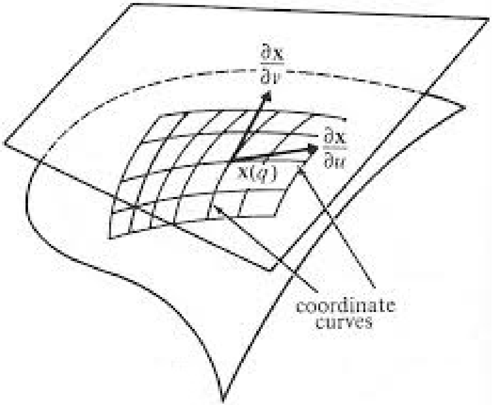
$$df_x(X) = \frac{d}{dt}f(x(t)).$$



Ex: se M e N têm coordenadas (x, y) e (u, v), $X = (x'(t), y'(t))$ e $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ então

$$df(X) = \frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{Jacobiano } J} \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{X} = J\,X$$

Sistema de coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ dá em T_xM uma base de *vetores coordenados* $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ ao longo das curvas coordenadas.



Base dual em $(T_xM)^*$ é dada pelos diferenciais $(dx^1, \ldots, dx^n)$ das funções coordenadas $x^i : M \to \mathbb{R}$.

Se $f : M \to \mathbb{R}$ então $df_x : T_xM \to T_{f(x)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ é funcional.

Se M tiver coordenadas (x, y) e $u = u_x\partial_x + u_y\partial_y$ então

$$df(u) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}}_{J} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot u_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot u_y$$

Em $\mathbb{R}^2$, poderíamos reescrever como

$$df(u) = \langle \nabla f, u \rangle,$$

ou seja, ∇f é o vetor contravariante associado ao covariante df,

$$\nabla f = (df)^\sharp.$$

Usamos isso para definir ∇f numa variedade (requer métrica).

Pondo $\nabla f = a\partial_x + b\partial_y$, queremos

$$\begin{aligned} \langle \nabla f, u \rangle &= df(u) \\ \langle\, a\partial_x + b\partial_y \,,\, u_x\partial_x + u_y\partial_y \,\rangle &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot u_x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot u_y \\ (ag_{xx} + bg_{yx})\cdot u_x + (ag_{xy} + bg_{yy})\cdot u_y &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot u_x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot u_y \\ \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{yx} \\ g_{xy} & g_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

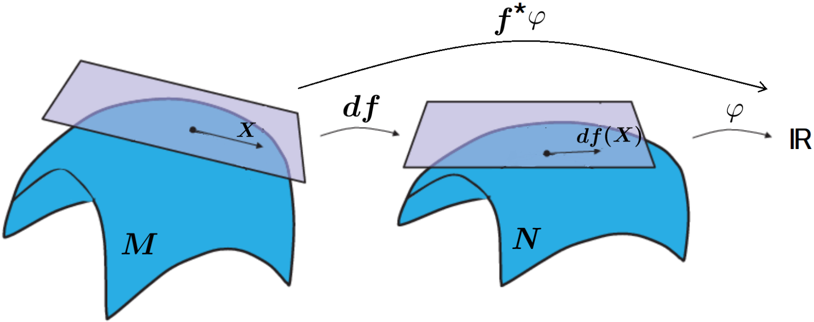
Usando a matriz inversa da métrica, obtemos

$$\nabla f = \left(g^{xx}\frac{\partial f}{\partial x} + g^{xy}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\partial_x + \left(g^{yx}\frac{\partial f}{\partial x} + g^{yy}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\partial_y$$

A métrica complica o ∇f não-cartesiano, mas df continua simples!

Pushforward *df* de vetores de M para N dá um *pullback* f^* de funcionais de N para M,

$$f^* : (T_{f(x)}N)^* \to (T_x M)^*, \quad f^*\varphi = \varphi \circ df.$$



Pullback de p-forma α em N é uma p-forma $f^*\alpha$ em M, calculada fazendo pushforward de p vetores de M para N e aplicando α.

Se M e N têm coordenadas (x, y) e (u, v), $X = a\partial_x + b\partial_y$ e $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ então

$$\begin{aligned}(f^*du)(X) &= du(df(a\partial_x + b\partial_y)) \\ &= a \cdot du\Big(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \partial_u + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \partial_v\Big) + b \cdot du\Big(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \partial_u + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \partial_v\Big) \\ &= a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \Big(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy\Big)(X).\end{aligned}$$

Ou seja, $f^*du = \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot dy$.

Regra da cadeia, mas a notação f^*du mostra que du foi levado para outra variedade.

Formas Diferenciais

p-forma diferencial em M é uma p-forma em cada T_xM, variando suavemente.

Ex: $\alpha = x^2z\, dx \wedge dy + \operatorname{sen} y\, dx \wedge dz$

$\Omega^p(M) = \{p\text{−formas diferenciais em } M\}$

$\Omega^0(M) = \{0\text{−formas diferenciais em } M\} = \{\text{funções } f : M \to \mathbb{R}\}$

Se $f \in \Omega^0(M)$, cada df_x é um funcional (1-forma) em T_xM, logo $df \in \Omega^1(M)$. Ou seja, d é um operador $d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$.

Extendemos a $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ aplicando nas componentes:

$$\begin{aligned}
d\alpha &= d(x^2z) \wedge dx \wedge dy + d(\operatorname{sen} y) \wedge dx \wedge dz \\
&= (2xz\, dx + x^2 dz) \wedge dx \wedge dy + \cos y\, dy \wedge dx \wedge dz \\
&= x^2 dz \wedge dx \wedge dy + \cos y\, dy \wedge dx \wedge dz \\
&= (x^2 - \cos y) dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

Formalmente, a *derivada exterior* $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ é caracterizada por:

i Em Ω^0 ela é o diferencial de funções.

ii $\mathbb{R}$-linear: $d(a \cdot \alpha + b \cdot \beta) = a \cdot d\alpha + b \cdot d\beta$.

iii Leibniz: se α é p-forma e β é q-forma então

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.$$

iv $d^2 = 0$, isto é, $d(d\alpha) = 0$.

Essa última decorre da alternatividade e das derivadas parciais mistas não dependerem da ordem.

$$d(d(xy^3)) = d(y^3 dx + 3xy^2 dy) = 3y^2 dy \wedge dx + 3y^2 dx \wedge dy = 0.$$

Ex: se $\alpha = \alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz$ então

$$\begin{aligned} d\alpha &= d(\alpha_x) \wedge dx + d(\alpha_y) \wedge dy + d(\alpha_z) \wedge dz \\ &= \Big(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} dy + \frac{\partial \alpha_x}{\partial z} dz\Big) \wedge dx \\ &\quad + \Big(\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} dy + \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} dz\Big) \wedge dy + \Big(\dots\Big) \wedge dz \\ &= \Big(\frac{\partial \alpha_y}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial y}\Big) dx \wedge dy + \Big(\frac{\partial \alpha_z}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_y}{\partial z}\Big) dy \wedge dz + \Big(\dots\Big) dz \wedge dx \end{aligned}$$

Como as componentes do rotacional em cartesianas!

Em 0-formas d está ligado ao grad, e em 1-formas ao rot.

Ao contrário do rot, funciona em variedades de qualquer dimensão, e a fórmula é a mesma em todo sistema de coordenadas!

Ex: se $\alpha = \alpha_x dy \wedge dz + \alpha_y dz \wedge dx + \alpha_z dx \wedge dy$ então

$$\begin{aligned} d\alpha &= d(\alpha_x) dy \wedge dz + d(\alpha_y) dz \wedge dx + d(\alpha_z) dx \wedge dy \\ &= \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Em 2-formas d está ligado ao div!

Na verdade não é tão simples, pois grad, rot, div operam em termos de vetores e d em formas.

A correspondência exata usa os isomorfismos musicais e de Hodge (requer métrica e orientação, e rot só em dim $= 3$):

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= (df)^\sharp \\ \operatorname{rot} v &= (*\, d\, v^\flat)^\sharp \\ \operatorname{div} v &= *\, d * v^\flat \end{aligned}$$

Métrica complica grad, rot, div em coordenadas não-cartesianas.

Usar d é mais fácil: mesma fórmula em quaisquer coordenadas, funciona com formas de qualquer grau, em variedades de qualquer dimensão.

A identidade $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ corresponde a várias do cálculo vetorial:

$$\begin{aligned}
&\nabla(\psi\phi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \\
&\nabla \cdot (\psi\mathbf{A}) = \psi\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla\psi \\
&\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \\
&\nabla \times (\psi\mathbf{A}) = \psi(\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla\psi \times \mathbf{A}
\end{aligned}$$

E $d^2 = 0$ corresponde a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= 0 \\
\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) &= 0
\end{aligned}$$

Integração

Seja $U \subset \mathbb{R}^p$ região aberta, com orientação usual. Se $\alpha \in \Omega^p(\mathbb{R}^p)$ então $\alpha = f(x)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p$, e definimos

$$\int_U \alpha = \int_U f(x)\, dx^1 \ldots dx^p$$

Em variedade orientada, com parametrização $\phi : U \subset \mathbb{R}^p \to M$, dada $\alpha \in \Omega^p(M)$ definimos

$$\int_{\phi(U)} \alpha = \int_U \phi^* \alpha$$

Para $\int_M \alpha$, separa M em pedaços, integra em cada, e soma.

Independe da parametrização, pois $\phi^*\alpha = \alpha \circ d\phi$, e $d\phi$ embute o Jacobiano de mudança de variáveis.

Integra 1-forma em curva orient., 2-forma em superfície orient., etc
Integrar 0-forma (função) em pontos orientados $(\pm)$ é somar/subtrair $f(x)$ em cada.

Ex: integrar $\alpha = -ydx + xdy$ em $C : x^2 + y^2 = 1$, anti-horário.

Com a parametrização $\phi : (0, 2\pi) \to C$, $\phi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, temos

$$\int_C \alpha = \int_0^{2\pi} \phi^* \alpha = \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen} t \cdot d(\cos t) + \cos t \cdot d(\operatorname{sen} t)$$
$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \cdot dt + \cos^2 t \cdot dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

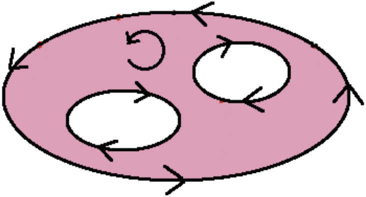
Obs: igual à integral de linha $\int_C v \cdot dr$ do campo $v = -yi + xj$.

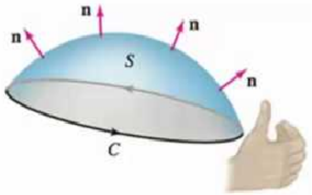
Integrais de 1-, 2- ou 3-formas substituem as integrais de linha, superfície ou volume do cálculo vetorial.

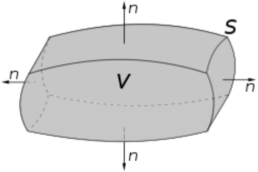
Funcionam melhor em variedades e dimensões maiores.

M variedade de dim p, sua *fronteira* ∂M é variedade de dim $p-1$.

Orientação em M induz outra em ∂M.







Teorema de Stokes generalizado: se M é variedade compacta orientada de dim p, e $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$, então

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha$$

Engloba teorema fundamental do cálculo, das integrais de linha, de Green, Stokes, Gauss, e generaliza para qualquer dim.

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \qquad \int_C \nabla f \cdot ds = f(B) - f(A)$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot \hat{n}\,dS = \int_C F \cdot dr \qquad \iiint_R \nabla \cdot F\,dV = \iint_S F \cdot \hat{n}\,dS$$

Referências

- V. Guillemin e A. Pollack, *Differential topology*, AMS Chelsea Pub., 2010.
- M. Spivak, *Calculus on manifolds*, W.A. Benjamin, 1965.
- H. Flanders, *Differential forms with applications to the physical sciences*, Dover Publications, 1989.
- E. Lima, *Cálculo tensorial*, IMPA, 1965.
- S.H. Weintraub, *Differential forms: a complement to vector calculus*, Academic Press, 1997.
- T. Frankel, *The geometry of physics: an introduction*, Cambridge University Press, 2001.

Obrigado!